Dozent: Dr. Martin Friesen

Tutor: Dennis Schroers

Finanzmathematik
Wintersemester 2018 / 2019

Blatt 3

- Abgabe bis **Donnerstag 15.11.2018 um 12:00.**
- Abgabe ins Postfach 89 auf Ebene D13.

Hinweis: Um die Korrekturen der Abgaben zu vereinfachen, soll in allen Aufgaben soll zuerst die allgemeine Formel angegeben (gegebenenfalls auch hergeleitet) werden. Im Anschluss sollen die einzusetzenden Parameter angegeben werden. Das Ausrechnen selbst braucht dann nicht weiter erläutert werden (d.h. es reicht dann das Ergebnis anzugeben).

Aufgabe 1. (3 Punkte)
Jürgen hat es leider nicht geschafft durch einen Studentenjob genug Geld für seine Traumreise nach Neuseeland zu sammeln. Da er unbedingt fliegen möchte, hat er sich entschlossen einen Verbraucherkredit über eine Summe von 2000 Euro aufzunehmen. Die Bank bietet ihm die Wahl zwischen einem Kredit mit Ratentilgung oder Annuitätentilgung an. Beide werden mit dem gleichen Zinssatz von 5 Prozent vergeben. Für welchen Kredit sollte Jürgen sich entscheiden, wenn er möglichst wenig Zinsen der Bank zahlen möchte.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Sei $n \geq 1$, $p \in (0,1)$ sowie $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$. Definiere

$$p(\omega) = \binom{n}{\omega} p^{\omega}(1-p)^{n-\omega}, \qquad \omega \in \Omega.$$

Zeigen Sie:

(a) $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

(b) Bestimmen Sie $\sum_{\omega \in \Omega} \omega p(\omega)$ sowie $\sum_{\omega \in \Omega} \omega^2 p(\omega)$.

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Sei $\Omega = \{-1, +1\}$ und $p(+1) = \frac{1}{3}$ sowie $p(-1) = \frac{2}{3}$. Wir betrachten das Ein-Perioden Modell mit einem Bond sowie nur einem Asset. Der zugrundeliegende Zinssatz sei $r = 0.01$. Der Bond sei gegeben durch

$$\pi_0 = 1, \qquad S_0 = \pi_0 \cdot (1 + r) = 1.01.$$

Das zugrundeliegende Asset sei gegeben durch

$$\pi_1 = 2, \qquad S_1(\omega) = \begin{cases} 2\pi_1, & \omega = +1 \\ \frac{1}{3}\pi_1, & \omega = -1 \end{cases}.$$

Sei $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}^2$ ein Portfolio.

(a) Bestimmen Sie $V_0(\xi)$ sowie $V_1(\xi)(\omega)$ für $\omega \in \Omega$.

(b) Bestimmen Sie den Gewinn, d.h. $\frac{V_1(\xi)(\omega)}{1+r} - V_0(\xi)$ für $\omega \in \Omega$.

(c) Bestimmen Sie den erwarteten Gewinn, d.h. $\mathbb{E}\left(\frac{V_1(\xi)}{1+r} - V_0(\xi)\right)$. Für welche ξ ist der Gewinn positiv, negativ oder Null?

Aufgabe 4. (6 Punkte)
Sei $\Omega = \{-1, +1\}$ und $p(+1) = \rho$, $p(-1) = 1 - \rho$, wo $\rho \in (0, 1)$. Wir betrachten das Ein-Perioden Modell mit einem Bond sowie nur einem Asset. Der zugrundeliegende Zinssatz sei $r = 0.01$. Der Bond sei gegeben durch

$$\pi_0 = 1, \qquad S_0 = \pi_0 \cdot (1 + r) = 1.01.$$

Das zugrundeliegende Asset sei gegeben durch

$$\pi_1 = 2, \qquad S_1(\omega) = \begin{cases} 2\pi_1, & \omega = +1 \\ \frac{1}{2}\pi_1, & \omega = -1 \end{cases}.$$

Sei $\xi = (\xi_0, \xi_1) = (1, 2)$ ein Portfolio.

(a) Bestimmen Sie $V_0(\xi)$ sowie $V_1(\xi)(\omega)$ für $\omega \in \Omega$.

(b) Bestimmen Sie den Gewinn, d.h. $\frac{V_1(\xi)(\omega)}{1+r} - V_0(\xi)$ für $\omega \in \Omega$.

(c) Bestimmen Sie den erwarteten Gewinn, d.h. $\mathbb{E}\left(\frac{V_1(\xi)}{1+r} - V_0(\xi)\right)$. Für welche ρ ist der Gewinn positiv, negativ oder Null?